

О- 798164

На правах рукописи



**Шляхтич Евгений Николаевич**

**Разработка эффективных методов электростатики проводников и  
диэлектриков на плоскости**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук**

Красноярск - 2012

Работа выполнена в *федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет», в Институте инженерной физики и радиоэлектроники.*

**Научный руководитель:**

*кандидат физико-математических наук, доцент,  
Казанцев Владимир Петрович.*

**Официальные оппоненты:**

*Бордовицын Владимир Александрович, доктор  
физико-математических наук, профессор, федеральное  
государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Национальный  
исследовательский Томский государственный университет»,  
профессор кафедры теоретической физики.*

*Балаев Дмитрий Александрович, доктор  
физико-математических наук, доцент, Институт физики им.  
Л.В. Киренского Сибирского отделения РАН, ведущий научный  
сотрудник лаборатории сильных магнитных полей.*

**Ведущая организация:**

*Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет».*

Защита состоится «22» ноября 2012 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», 634050, г. Томск, пр. Ленина 36.

С диссертацией можно ознакомиться в *Научной библиотеке Томского государственного университета*

Автореферат разослан «19» октября 2012 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета

*Ивонин Иван Варфоломеевич*



НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ



0000791918

**Актуальность работы.** В научной и учебной литературе под основной задачей электростатики понимают задачу отыскания напряженности электрического поля системы зарядов в присутствии проводников и диэлектриков. Решение этой задачи представляет значительные трудности даже для уединённых проводников и диэлектриков находящихся во внешних электрических полях. В реальных электрических системах бывает трудно промоделировать и измерить электрические поля, поэтому для расчета электромагнитных параметров требуется применение методов теоретической физики.

Расчёт электрических и магнитных полей различных систем элементами которых являются проводники и диэлектрики представляет практический интерес для различных областей науки: электрофизики, радиоэлектроники, радиофизики. Развитие этих областей науки предъявляет строгие требования к точности расчетных методов. Эти методы должны быть экономичны и доступны для широкого круга инженеров и других пользователей. Кроме того, не менее важна оценка точности полученных результатов, что иногда является более сложной задачей, чем получение самого результата.

Для электростатики на плоскости наиболее удобным математическим аппаратом служит комплексный анализ. Развитие ТФКП на основании физических представлений позволяет создавать новые методы решения важнейших практических задач. Так методы ТФКП позволяют находить точные аналитические решения электростатических задач. Совместное применение к задачам электростатики вариационных методов и комплексного анализа позволяет разработать довольно эффективные методы решения этих задач. Разработке эффективных аналитических методов расчёта электрических полей и численной реализации этих расчётов на конкретных примерах и посвящена данная работа.

В данной работе реализованы подходы к построению аналитической электростатики, связанные с рассмотрением в неразрывном единстве электрического поля и его источников – электрических зарядов – на всей комплексной плоскости, а не в отдельных областях её, как это часто делают в математической физике. Конкретные электростатические задачи формулируются как задачи о минимуме энергетических функционалов, поэтому возникает необходимость разработки методов выбора пробных функций с учётом характерных особенностей задач. Предлагаются соответствующие методы для задач электростатики проводников и диэлектриков. Их суть заключается в построении на поверхности проводника базисной системы распределений зарядов, электрические поля которых ортогональны в энергетической мере.

Такие распределения зарядов, упорядоченные по отличным от нуля круговым мультипольным моментам минимального порядка названы характеристическими мультиполями. Нахождение характеристических мультиполей эквивалентно построению ортогонального базиса в функциональном пространстве электрических потенциалов, источниками которых служат поверхностные заряды проводника (диэлектрика). Введение новых для теории поля понятий характеристических мультиполей и высших поляризуемостей для проводников и диэлектриков, позволяет построить конструктивные решения всевозможных задач о проводниках и диэлектриках, находящихся во внешних электрических полях.

### **Цель работы:**

Разработка эффективных методов расчета электрических полей в электростатике проводников и диэлектриков на плоскости.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

- на конкретных примерах показать эффективность совместного применения вариационных принципов и теории функций комплексных переменных в решениях электростатических задач на плоскости;
- рассмотреть задачи о проводниках и диэлектриках во всевозможных внешних электрических полях;
- развить необходимую систему понятий;
- разработать вариационные схемы вычисления емкостных и потенциальных коэффициентов систем проводников, основанные на аппроксимации полей индуцированных зарядов полями точечных источников.

**Научная новизна** работы заключается в том, что в ней:

1. Показана эффективность совместного использования вариационных методов и методов теории функций комплексных переменных для решения электростатических задач на плоскости на конкретных примерах: проводящий круг, проводящая прямая, проводящий эллипс, однородный диэлектрический круг, однородный диэлектрический эллипс, анизотропный диэлектрический круг во всевозможных внешних электрических полях.

2. Впервые построены комплексные функции Грина внешней и внутренней областей эллипса.

3. Введены новые понятия: эллипс сходимости, мнимый точечный заряд, характеристические мультиполи.

4. С помощью аппарата характеристических мультиполей впервые решена задача об анизотропном диэлектрическом круге в различных

внешних электрических полях.

5. Впервые математическая задача о нахождении корней многочленов представлена как обратная задача электростатики, сводящаяся к задаче об абсолютном минимуме энергетического функционала.

6. На основе задачи аппроксимации полей индуцированных на проводниках зарядов полями точечных источников построены вариационные схемы расчёта корней многочленов и показана возможность практического применения такой физической интерпретации математической задачи для численных расчётов.

7. На примере проводящих эллипса и круга рассмотрена возможность вычисления емкостных и потенциальных коэффициентов такой системы с помощью аппроксимации электрических полей точечными экранированными мультиполями на основе вариационных принципов.

#### **Научная и практическая ценность.**

Предложен метод анализа электростатических полей, основанный на органичном объединении методов теории функций комплексных переменных и вариационных методов.

Развитые теоретические методы расчёта электрических полей различных систем проводников и диэлектриков на плоскости могут применяться в дальнейшем при практических расчётах в радиофизике и радиоэлектронике, некоторые результаты представленных научных исследований представляют интерес для курсов математической физики и электродинамики.

#### **На защиту выносятся следующие положения:**

1. Наиболее эффективным методом решения электростатических задач на плоскости является объединение методов теории функций комплексных переменных и вариационных методов.

2. Эффективным методом реализации вариационных принципов электростатики является построение базисных распределений индуцированных зарядов – характеристических мультиполей; применение такого метода рассматривается на примере задач о проводящем эллипсе во всевозможных внешних электрических полях.

3. Применение аппарата характеристических мультиполей позволяет дать полное решение задач о диэлектрических телах во внешних электрических полях; рассмотрены задачи об однородном диэлектрическом круге, об однородный диэлектрическом эллипсе, а также об анизотропном диэлектрическом круге во всевозможных внешних электрических полях.

4. Использование вариационного подхода совместно с комплексным анализом позволяет представить математическую задачу о нахождении

корней многочленов, как обратную задачу электростатики, сводящуюся к задаче об абсолютном минимуме энергетического функционала.

5. На основе вариационных принципов удобно получать решения задач аппроксимации электрических полей точечными экранированными мультиполями, что позволяет вычислять емкостные и потенциальные коэффициенты различных систем проводников.

### **Апробация работы.**

Результаты диссертационного исследования были представлены на следующих конференциях: Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" посвящённая 110-летию академика М.А. Лаврентьева, г. Новосибирск (2010г.); Международная конференция физика в системе современного образования, г. Санкт-Петербург (2007г. и 2009г.); Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных (2006-2012гг.); Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по физике, г. Владивосток (2010г. и 2011г.); Региональная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых-физиков, г. Красноярск (2006-2010г.).

### **Публикации.**

По теме диссертации опубликовано 17 печатных работ, включая 4 статьи в центральных рецензируемых научных журналах, и 13 публикаций в сборниках материалов и тезисов всероссийских и международных конференций.

### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из 5 основных глав, а также введения и заключения. Содержит 7 таблиц, 67 библиографических ссылок и занимает объем 169 страниц печатного текста.

## **Основное содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность работы, показана научная новизна, сформулирована цель исследования. Приводятся положения, выносимые автором на защиту. Рассмотрена научная и практическая значимость работы.

**В первой главе** диссертации рассматриваются два класса задач: проводящий круг во внешних электрических полях и проводящая прямая во внешних электрических полях.

В работе рассмотрен метод решения основной задачи электростатики на примере проводящего в целом не заряженного круга, находящегося во внешнем электрическом поле. Полученный и представленный в комплексной форме метод решения основной задачи электростатики

является простым и универсальным. При решении задачи для проводящего круга в поле любого потенциала нам достаточно знать лишь одну формулу:

$$\tilde{\Pi}(z) = \begin{cases} \Pi(0) - \Pi(z) & \text{при } z < a \\ \Pi^*(0) - \Pi^*(a^2/z^*) & \text{при } z > a \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Pi(z)$  - комплексный потенциал внешнего электрического поля;  $\tilde{\Pi}(z)$  - комплексный потенциал, индуцированных внешним полем зарядов,  $a$  - радиус проводящего круга. То есть для решения основной задачи электростатики необходимо лишь знать комплексный потенциал внешнего поля. Причём решение нетрудно получить практически для любого потенциала, какой только можно себе представить. Естественно для полного анализа задач приведём формулы для нахождения поверхностной плотности наведённых зарядов  $\sigma(z)$  и напряжённости электрического поля  $E(z)$ , в которых опять же достаточно знания комплексного потенциала  $\Pi(z)$  внешнего электрического поля:

$$E^* = E_x - iE_y = \begin{cases} \Pi'(z) & |z| < a \\ -(\Pi'(a^2/z^*))^*(a^2/z^2) & |z| > a \end{cases} ; \quad (2)$$

$$\sigma(z) = -\varepsilon_0 \left( \Pi'(z) \frac{z}{a} + \Pi'^*(z) \frac{z^*}{a} \right) \Big|_{|z|=a} = -2\varepsilon_0 \operatorname{Re} \Pi'(z) \frac{z}{a} \Big|_{|z|=a} \quad (3)$$

По известному комплексному потенциалу внешнего поля также нетрудно получить энергетические характеристики поля:

$$W = \varepsilon_0 \int_{|z|<a} \left| \Pi'(z) \right|^2 ds. \quad (4)$$

В первой главе работы рассмотрены примеры решения задач о проводящем круге в различных внешних электрических полях: проводящий круг в мультипольном электрическом поле  $m$ -ого порядка; проводящий круг в электрическом поле нескольких точечных зарядов; проводящий круг в электрическом поле нескольких точечных диполей; проводящий круг в электрическом поле нескольких точечных зарядов, комплексный потенциал которых выражен через многочлен с неизвестными корнями, лежащими вне круга; проводящий круг в электрическом поле нескольких точечных диполей, комплексный потенциал которых выражен через многочлен с неизвестными корнями, лежащими вне круга.

Аналогично задаче о проводящем круге во внешнем электрическом поле для решения основной задачи электростатики для проводящей

прямой во внешнем электрическом поле достаточно знать комплексный потенциал внешнего поля. В качестве примеров решения задачи о проводящей прямой во внешнем электрическом поле рассмотрены задачи: проводящая прямая в поле с комплексным потенциалом  $Az^n$ ; проводящая прямая в поле с комплексным потенциалом  $A \exp(\alpha z)$ ; проводящая прямая в поле точечного заряда; проводящая прямая в поле точечного мультиполя; проводящая прямая в поле нескольких точечных диполей; проводящая прямая в поле с комплексным потенциалом, который выражается через многочлен.

**Вторая глава** посвящена задачам о проводящем эллипсе в электрических полях. Показано что для решения задач о проводящем эллипсе в электрических полях удобно использовать аппарат характеристических мультиполей. Характеристические мультиполи представляют собой базисные распределения заряда по поверхности проводника, упорядоченные по минимальным степеням отличных от нуля круговых (сферических) мультипольных моментов. Электрические поля характеристических мультиполей различных порядков энергетически ортогональны, а высшие поляризуемости определяют энергию суперпозиции характеристических мультиполей одного и того же порядка.

При решении задач об электрически нейтральном проводящем эллипсе, находящемся во внешнем электрическом поле с комплексным потенциалом  $\pi(z)$ , можно представить комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов суммой потенциалов характеристических мультиполей эллипса

$$\Pi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr} \Pi_{kr}(z) + x_{ki} \Pi_{ki}(z)); \quad (5)$$

$$x_{kr} = -2\pi\epsilon_0 k (A^{2k} + (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int_{|G|=A} \pi(z) \sigma_{kr} dl; \quad (6)$$

$$x_{ki} = -2\pi\epsilon_0 k (A^{2k} - (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int_{|G|=A} \pi(z) \sigma_{ki} dl. \quad (7)$$

При этом мы пользуемся тем, что функция

$$G(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$$

конформно отображает внешнюю к эллипсу область на область, внешнюю к окружности комплексной плоскости  $G$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad |G(z)| = A = \frac{a+b}{2}.$$



и тогда базисные комплексные потенциалы наведённых зарядов могут быть выражены через  $G(z)$

$$\Pi_{kr}(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 k} \begin{cases} \frac{1}{G^k(z)} & \text{при } z \in |G(z)| > A \\ \frac{c^k}{2^{k-1}(A^{2k} + (c/2)^{2k})} T_k(z/c) & \text{при } z \in |G(z)| < A \end{cases}; \quad (8)$$

$$\Pi_{ki}(z) = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 k} \begin{cases} \frac{1}{G^k(z)} & \text{при } z \in |G(z)| > A \\ -\frac{c^k}{2^{k-1}(A^{2k} - (c/2)^{2k})} T_k(z/c) & \text{при } z \in |G(z)| < A \end{cases}.$$

где  $T_k(z/c)$ - это многочлен Чебышева первого рода. Соответственно нахождение характеристических мультиполей позволяет решить полностью задачу о проводящем эллипсе во внешних электрических полях. Рассмотрены конкретные примеры: проводящий эллипс в поле, комплексный потенциал которого представляет собой элементарные функции:  $-E^* z^n$ ,  $-E^* \cos(\gamma z)$ ,  $-E^* \sin(\gamma z)$  и  $-E^* \exp(\gamma z)$ ; проводящий эллипс в поле, комплексный потенциал которого представляет собой специальную функцию Бесселя  $-E^* J_n(\gamma z)$ ; проводящий эллипс в электрическом поле точечного заряда, расположенного вне эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле точечного диполя, расположенного вне эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле точечного мультиполя, расположенного вне эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле с комплексным потенциалом, представляемым внутри эллипса сходящимся степенным рядом; проводящий эллипс в электрическом поле системы точечных зарядов, расположенных вне эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле системы точечных диполей, расположенных вне эллипса.

Построена комплексная функция Грина внешней области эллипса и её источники, так как задача об эллипсе в электрическом поле одного точечного заряда, расположенного вне эллипса эквивалентна задаче о функции Грина внешней к эллипсу области.

При решении задачи о проводящем эллипсе в поле точечного заряда оказалось возможным ввести новое понятие - эллипс сходимости степенного ряда.

Физический смысл процесса определения эллипса сходимости заключается в следующем: фиксируя внешний конформный радиус,

выделить отдельный эллипс из семейства софокусных, а затем задаться вопросом о том, может ли электрический заряд, распределенный по этому эллипсу, создать электрическое поле с комплексным потенциалом внешнего поля; ответ на этот вопрос будет положительным, если рассчитанная электростатическая энергия окажется конечной, и отрицательной, если ряд для энергии будет расходящимся.

Была рассмотрена задача аппроксимации поля зарядов расположенной вне эллипса окружности, экранированной проводящим эллипсом, полем системы точечных зарядов. В решении этой задачи показано, что с помощью вариационных принципов минимизируя функционал энергии мы можем вычислять потенциальные и емкостные коэффициенты для систем проводников.

При рассмотрении класса задач об электрически нейтральном проводящем эллипсе, находящемся в электрическом поле расположенных внутри эллипса зарядов, с помощью аппарата характеристических мультиполей были решены следующие задачи: построено конформное отображение внутренней области эллипса на круг и построена функция Грина внутренней области эллипса; задача о точечном диполе, экранированном внутри эллипса; задача о точечном мультиполе, экранированном внутри эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле системы точечных зарядов, расположенных внутри эллипса; проводящий эллипс в электрическом поле системы точечных диполей, расположенного внутри эллипса; аппроксимация поля зарядов расположенной внутри эллипса окружности, экранированной проводящим эллипсом, полем системы точечных зарядов.

Таким образом, на примере задач о проводящем эллипсе показано, что аппарат характеристических мультиполей является эффективным способом решения задач для уединенных проводников, взаимодействующих с внешними электрическими зарядами.

**В третьей главе** решаем задачи о диэлектрических телах во внешних электрических полях. Причём использование комплексного анализа и вариационных методов позволяет решать задачи не только для изотропных, но и для анизотропных диэлектриков.

В первом разделе данной главы рассмотрен метод построения характеристических мультиполей однородных изотропных диэлектрических тел. В основу метода положен аппарат характеристических мультиполей проводящих тел, имеющих ту же форму, что и диэлектрические. Идея метода заключается в следующем: на основе вариационного принципа для задачи о диэлектрическом теле во внешнем электрическом поле показано, что пробный

электрический потенциал индуцированных на диэлектрическом теле зарядов, принимает минимальное значение в том случае, если электрические заряды, наведённые на диэлектрическом теле внешним полем, будут сосредоточены на поверхности тела, а значит аппарат характеристических мультиполей удобно использовать и для диэлектрических тел. Тогда задача электростатики будет решена, если мы найдём поверхностную плотность распределений зарядов по границе диэлектрического тела. Поверхностную плотность зарядов находится минимизацией энергетического функционала:

$$W(\Pi(z)) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (|\Pi'(z)|^2 + (\varepsilon - 1)|\pi'_{out}(z) + \Pi'(z)|^2) dS, \quad (9)$$

где  $\pi_{out}(z)$  и  $\Pi(z)$  - это комплексные потенциалы внешнего электрического поля и поля наведённых на однородном изотропном диэлектрическом теле  $S$  зарядов. А зная плотности зарядов мы вычисляем и поляризованность диэлектриков. Эффективность развитого аппарата характеристических мультиполей продемонстрирована на примерах: однородный изотропный диэлектрический круг в поле точечного заряда и однородный изотропный диэлектрический эллипс во внешнем электрическом поле.

Описанный подход применим и для анизотропных диэлектриков. Во втором разделе третьей главы представлена общая схема построения характеристических мультиполей для анизотропного круга во внешнем электрическом поле и рассмотрены конкретные задачи: задача об однородном анизотропном диэлектрическом круге во внешнем электрическом поле, комплексный потенциал которого - многочлен; задача об однородном анизотропном диэлектрическом круге во внешнем электрическом поле точечного заряда; задача об однородном анизотропном диэлектрическом круге во внешнем электрическом поле точечного мультиполя. На этих примерах и продемонстрирована эффективность аппарата характеристических мультиполей.

**В четвёртой главе** задача о корнях многочленов рассматривается как обратная задача электростатики, сводящаяся к задаче об абсолютном минимуме энергетического функционала. Такая физическая интерпретация математической задачи основана на том, что на неподвижном проводнике внешним электростатическим полем наводятся заряды, энергия которых минимальна по сравнению с энергией любого другого произвольно выбранного распределения зарядов в области проводника. Действительно, в проводнике имеются свободные заряды, перемещение которых в пространстве ограничено лишь поверхностью проводника. Поэтому эти заряды будут перемещаться до тех пор,

пока не примут такое распределение, что проводник станет областью с постоянным потенциалом. Тогда силы, действующие на свободные заряды будут равны нулю и движение зарядов прекращается. Этот физически очевидный факт можно рассматривать как обобщённый вариационный принцип Гаусса: для проводящей области  $S$ , находящейся во внешнем электрическом поле с комплексным потенциалом  $\Pi(z)$ , будет справедлив вариационный принцип, аналогичный принципу Гаусса, утверждающий, что минимум энергетического функционала

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\tilde{\Pi}'(z)|^2 dS + Re \int_{\partial S} \sigma(z) \Pi(z) dl, \quad (10)$$

в котором  $\sigma(z)$  – плотность некоторого распределения электрических зарядов по границе  $\partial S$  проводящей области,  $\tilde{\Pi}(z)$  – комплексный потенциал этих зарядов, достигается для истинного распределения индуцированных внешним полем зарядов. Отметим, что интегрирование в первом интеграле соотношения (10) проводится по всей комплексной плоскости. Важно также то обстоятельство, что первое и второе слагаемое в энергетическом функционале имеют ясный физический смысл: первое определяет собственную энергию аппроксимирующих зарядов, а второе их энергию взаимодействия с внешним полем.

В работе представлены две вариационные схемы расчёта корней многочленов: вариационная схема расчёта корней многочлена, основанная на аппроксимации электрического поля зарядов круга полями точечных источников и вариационная схема расчёта корней многочлена, основанная на аппроксимации электрического поля зарядов прямой полями точечных источников. В качестве аппроксимирующих источников предлагаются точечные заряды и точечные диполи. Возможность использования различных точечных источников для аппроксимации открывает дополнительные возможности к усовершенствованию численной реализации предложенной схемы, так как мы можем сдвигать пробные заряды-изображения только при корреляции направления сил, полученных при аппроксимации различными полями.

Работоспособность предложенных вариационных схем подтверждена численными расчётами. Так, например, для уравнения пятой степени  $z^5 - 19z^4 + 133z^3 - 421z^2 + 586z - 280 = 0$  полученные по вариационной схеме результаты представлены для сравнения совместно с результатами расчётов стандартной функцией `roots` в MATLAB, табл. I.

Эти результаты также подтверждают работоспособность и состоятельность такого метода нахождения корней многочленов.

Таблица 1.

i	$\gamma$ (функция root в MATLAB)	$\xi$ (вариационная схема)
1	1.00000000000000	1.00000000000003
2	4.00000000000008	4.00000000000405
3	1.99999999999999	1.99999999999963
4	4.99999999999984	4.99999999999389
5	7.00000000000009	7.00000000000256

К плюсам предложенной вариационной схемы расчёта корней многочленов следует отнести то, что с её помощью можно находить корни многочленов любых степеней и в том числе и кратных корней, а также оценивать погрешности вычислений.

В пятой главе построены вариационные неравенства для емкостных коэффициентов на примере проводящих эллипса и круга. С помощью характеристических мультиполей на основе вариационных принципов путём минимизации энергетических функционалов находятся энергетические характеристики системы проводников, а также емкостные коэффициенты таких систем. Использование вариационных методов позволяет оценивать сверху и снизу, полученные значения для емкостных коэффициентов. Пятая глава состоит из следующих разделов: общая вариационная схема расчёта емкостных коэффициентов эллипса и круга с использованием характеристических мультиполей; оценки нулевого и первого порядков для матрицы емкостных коэффициентов эллипса и круга; оценка второго порядка для матрицы емкостных коэффициентов эллипса и круга; приближение электрического поля проводящих эллипса и круга полями экранированных эллипсом точечных зарядов; приближение электрического поля проводящих эллипса и круга полями экранированных эллипсом точечных зарядов и мультиполей.

В заключении формулируются основные результаты и выводы работы.

### Основные результаты диссертационной работы:

1) Показано, что наиболее эффективными методами решения электростатических задач на плоскости является объединение методов теории функций комплексных переменных и вариационных методов, совместное использование которых позволяет полностью решать задачи о нахождении напряжённости (потенциалов) электрических полей на

всей комплексной плоскости, а также находить энергетические и силовые характеристики электрических полей. В качестве примеров решены классы задач: проводящий круг, проводящая прямая, проводящий эллипс, однородный диэлектрический круг, однородный диэлектрический эллипс, анизотропный диэлектрический круг во всевозможных внешних электрических полях.

2) Применение аппарата характеристических мультиполей – эффективный способ решения электростатических задач, что подтверждают следующие рассмотренные задачи: проводящий эллипс, однородный диэлектрический круг, однородный диэлектрический эллипс, анизотропный диэлектрический круг во всевозможных внешних электрических полях.

3) На примере системы, составными элементами которой являются проводящий эллипс и проводящий круг, рассмотрены задачи аппроксимации электрических полей точечными экранированными мультиполями. С помощью вариационных принципов в таких задачах аппроксимации мы можем вычислять емкостные и потенциальные коэффициенты и при этом оценивать точность полученных результатов.

4) Использование вариационного подхода совместно с комплексным анализом позволяет представить математическую задачу о нахождении корней многочленов, как обратную задачу электростатики, сводящуюся к задаче об абсолютном минимуме энергетического функционала. Проведено исследование возможности практического применения такой физической интерпретации математической задачи для численных расчётов, которое подтверждает работоспособность предлагаемой вариационной схемы, достоинствами которой является то, что она позволяет находить любые корни, в том числе и кратные, а также оценивать погрешность вычислений.

5) Обоснованные теоретически методы расчёта электрических полей могут применяться в дальнейшем при практических расчётах в радиофизике и радиоэлектронике. Существенно, что некоторые результаты представленных научных исследований представляют интерес для курсов математической физики и электродинамики.

#### **Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. Казанцев В. П., Шляхтич Е. Н. Проводящий круг во внешнем электрическом поле // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. – 2006. – № 1. – С. 21-25.

2. Казанцев В. П., Шляхтич Е. Н. Задача о корнях многочленов как обратная задача электростатики // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. – 2006. –

№ 9. - С. 16-20.

3. Казанцев В. П., Шляхтич Е. П. Характеристические мультиполи эллипса и решение задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. - 2009. - Т. 2, № 4. - С. 410-425.

4. Казанцев В. П., Шляхтич Е. Н. Примеры решения задач о проводящем эллипсе во внешних электрических полях // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. - 2011. - Т. 4, № 1. - С. 85-101.

5. Шляхтич Е. Н. Основная задача электростатики для проводящего круга / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-12. Двенадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., г. Новосибирск, 23-29 марта 2006 г. - Новосибирск, 2006. - С.783-784.

6. Шляхтич Е. Н. Задача о корнях многочленов как обратная задача электростатики / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-13. Тринадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых: материалы конф., Ростов-на-Дону, Таганрог, 20-26 апреля 2007 г. - Екатеринбург ; Ростов-на-Дону ; Таганрог, 2007. - С. 53-55.

7. Шляхтич Е. Н. Комплексный анализ и вариационные принципы в электростатике / Е. Н. Шляхтич // Физика в системе современного образования (ФССО-07) : материалы Девятой Междунар. конф., г. Санкт-Петербург, 4-8 июня 2007 г. - Санкт-Петербург, 2007. - С. 170.

8. Шляхтич Е. Н. Характеристические мультиполи эллипса и решение задачи об электрическом поле зарядов, распределённых по эллипсу / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-14. Четырнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., г. Уфа, 26 марта - 3 апреля 2008 г. - Екатеринбург ; Уфа, 2008. - С. 71-72.

9. Шляхтич Е. Н. Точное решение задачи об однородном изотропном диэлектрическом круге во внешних электрических полях/ Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-15. Пятнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых: материалы конф., Кемерово, Томск, 26 марта - 2 апреля 2009 г. - Екатеринбург ; Кемерово, 2009. - С. 69-70.

10. Шляхтич Е. Н. Повышение эффективности передачи знаний посредством обобщающих формул / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-15. Пятнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., Кемерово, Томск, 26 марта - 2 апреля 2009 г. - Екатеринбург ; Кемерово, 2009. - С. 845-846.

11. Шляхтич Е. Н. Точное решение задачи об однородном изотропном диэлектрическом круге во внешних электрических полях / Е. Н.

Шляхтич, В. П. Казанцев // Физика в системе современного образования (ФССО-09) : материалы X Международ. конф., г. Санкт-Петербург, 31 мая - 4 июня 2009 г. - Санкт-Петербург, 2009. - С.79-81.

12. Шляхтич Е. Н. Аппроксимация электрических полей проводников полями точно экранированных мультиполей / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-16. Шестнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., г. Волгоград, 22-29 апреля 2010 г. - Екатеринбург; Волгоград, 2010. - С. 50-51.

13. Шляхтич Е. Н. Аппроксимация электрических полей проводников и диэлектриков полями точно экранированных мультиполей / Е. Н. Шляхтич // Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по физике, г. Владивосток, 12-14 мая 2010 г. - Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2010. - С. 30-32.

14. Шляхтич Е. Н., Функции комплексного переменного и вариационные принципы задач электростатики на плоскости / Е. Н. Шляхтич, В. П. Казанцев // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике : междунар. конф., посвящ. 110-летию М. А. Лаврентьева, г. Новосибирск, 23-27 августа 2010 г. - Новосибирск, 2010. - С. 39-40.

15. Шляхтич Е. Н. Характеристические мультиполи однородных изотропных диэлектриков в задачах электростатики на плоскости / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-17. Семнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., г. Екатеринбург, 25 марта - 1 апреля 2011 г. - Екатеринбург, 2011. - С. 71-73.

16. Шляхтич Е. Н. Характеристические мультиполи в решениях задач о проводниках и диэлектриках во внешних электрических полях / Е. Н. Шляхтич, В. П. Казанцев // Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по физике, г. Владивосток, 11-13 мая 2011 г. - Владивосток, 2011. - С. 16-17.

17. Шляхтич Е. Н. Решение задач электростатики проводников и диэлектриков методами аналитической электростатики / Е. Н. Шляхтич // ВНКСФ-18. Восемнадцатая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых : материалы конф., г. Красноярск, 29 марта - 5 апреля. - Красноярск, 2012. - С. 82-83.



Подписано в печать 15.10.2012. Печать плоская. Формат 60х84/16  
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 9816

Отпечатано полиграфическим центром Библиотечно-издательского комплекса  
Сибирского федерального университета/ 660041 Красноярск, пр. Свободный, 82а  
Тел/факс (391)206-26-67, 206-26-49/ E-mail: [print\\_sfu@mail.ru](mailto:print_sfu@mail.ru); <http://lib.sfu-kras.ru>





